Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2 (MAT06)

Partiel 1
Jeudi 25 octobre 2012

☒ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Deux heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, F. Palesi, H. Short

Exercice 1. (Cours, 6 points) Soit $f : V \to V$ un endomorphisme linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

(1) Pour une base $\mathcal{B}$ de V, donner la définition de la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
(2) Montrer que le déterminant de A ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.
(3) Donner les définitions des valeurs propres de f, et des sous-espaces propres associés.
(4) Donner la définition du polynôme caracteristique de f.

Exercice 2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) Calculer A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Montrer que le vecteur $(0, -1, 1)$ est vecteur propre de A. En déduire que -1 est une valeur propre de A.

Calculons $A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vectuer $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

(3) Calculer le polynôme caractéristique de A. Déterminer les racines de ce polynome dans $\mathbb{C}$.

Calculons en développant par rapport à la troisième ligne :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 & 5 \\ -2 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3+\lambda) \times 3 - 10 - \lambda((-3-\lambda)(2-\lambda)+10) = 3\lambda - 1 - \lambda(\lambda^2+\lambda+4) = -\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1$$
$$= -(\lambda+1)(\lambda^2+1)$$

Les racines du polynôme caractéristique et donc les valeurs propres de A sont $-1, i$ et $-i$.

(4) En déduire que A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Dans $\mathbb{C}$, A possède trois valeurs propres deux à deux distinctes, elle est donc diagonalisable.
Dans $\mathbb{R}$, A n'a qu'une seule valeur propre 1 qui est de multiplicité 1, elle n'est donc pas diagonalisable.

(5) Donner le spectre de la matrice A^4 (sans calculer A^4).

Comme $Au_1 = -u_1$, en multipliant trois fois par A (à gauche) nous obtenons $A^4u_1 = (-1)^4u_1 = u_1$. Nous en déduisons que u_1 est un vecteur propre de A^4 associé à la valeur propre 1.
Soit u_2 un vecteur propre (dans $\mathbb{C}^3$) de A associé à la valeur propre i. Alors u_2 est aussi un vecteur propre de A^4 associé à la valeur propre $i^4 = 1$.
De même, pour un vecteur propre u_3 de A associé à la valeur propre $-i$, $A^4u_3 = (-i)^4u_3 = u_3$. Ainsi u_3 est un vecteur propre de A^4 associé à la valeur propre 1.
La matrice A^4 possède une seule valeur propre 1 de multiplicité 3.

(6) En déduire que $A^4 = I_3$.

D'après la question précédente il existe une matrice de passage P telle que $P^{-1}A^4P = I_3$. En multipliant cette égalité à gauche par P et à droite par P^{-1} nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(P^{-1}A^4P)P^{-1} &= PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 \\ &= (PP^{-1})A^4(P^{-1}P) = I_3A^4I_3 = A^4 \end{aligned}$$

(7) Donner la matrice de changement de base qui rend la matrice diagonale.

Sous espace propre E_i :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & 5y & + & 5z & = & ix \\ -2x & + & 2y & + & 3z & = & iy \\ & & y & & & = & iz \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -2x & + & (4+2i)z & = & 0 \\ & & y & = & iz \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & (2+i)z \\ y & = & iz \end{array}\right.$$

Le vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} 2+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre i.

Sous espace propre E_{-i} :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & 5y & + & 5z & = & -ix \\ -2x & + & 2y & + & 3z & = & -iy \\ & & y & & & = & -iz \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -2x & + & (4-2i)z & = & 0 \\ & & y & = & -iz \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & (2-i)z \\ y & = & -iz \end{array}\right.$$

Le vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} 2-i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-i$.

La matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres (u_1, u_2, u_3) est $P = \begin{pmatrix} 0 & 2+i & 2-i \\ -1 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nous avons $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

Tournez la page SVP.

Problème

Première partie.

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent : $AB = BA$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A et soit E_λ le sous-espace propre associé.

(1) Montrer que pour tout vecteur u du sous-espace propre E_λ de A, le vecteur Bu est aussi dans E_λ.

> Soit u un vecteur du sous-espace propre E_λ, alors $Au = \lambda u$. Multiplions par la matrice B à gauche :
> $$\begin{aligned} B(Au) &= B(\lambda u) = \lambda(Bu) \\ &= (BA)u = (AB)u = A(Bu) \end{aligned}$$
> Le vecteur Bu est donc dans le sous-espace propre E_λ.

(2) Montrer que si E_λ est de dimension 1, alors tout vecteur propre u de A associé à λ est aussi un vecteur propre de B.

> Si E_λ est de dimension 1 (c'est une droite vectorielle), alors tous ses vecteurs sont colinéaires. En particulier pour tout vecteur propre u de A associé à λ et d'après la question précédente, u et Bu sont dans E_λ et sont donc colinéaires. Comme u est non nul il existe un scalaire μ tel que $Bu = \mu u$. Ce qui montre que u est un vecteur propre de la matrice B.

(3) Montrer que si A possède n valeurs propres deux-à-deux distinctes, et si $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de vecteurs propres de A et P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{B}'$, alors $P^{-1}BP$ est diagonale.

> Si A possède n valeurs propres deux à deux distinctes, alors chacun de ses n sous-espaces propres est de dimension 1 et nous pouvons utiliser la question précédente : tout vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B. La base $\mathcal{B}'$ est donc une base de vecteur propre de B et la matrice $P^{-1}BP$ est diagonale.

Deuxième partie.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, et soit $\mathrm{Comm}(A) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$ l'ensemble des matrices 2×2 qui commutent avec A.

(1) Montrer que $\mathrm{Comm}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

> Soit B_1 et B_2 deux matrices de $\mathrm{Comm}(A)$, et α_1 et α_2 deux scalaires. Alors
> $$(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)A = \alpha_1 B_1 A + \alpha_2 B_2 A = \alpha_1 A B_1 + \alpha_2 A B_2 = A(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)$$
> ce qui montre que $(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)$ est aussi dans $\mathrm{Comm}(A)$, qui est donc un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres que l'on calculera.

> Facilement, $Au_1 = u_1$ et $Au_2 = 2u_2$. Ce qui montre que u_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 et que u_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

(3) Déduire de la première partie que si $B \in \mathrm{Comm(A)}$, et si P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ alors $P^{-1}BP$ est de la forme $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

> D'après la première partie, pour toute matrice B de $\mathrm{Comm}(A)$, (u_1, u_2) est une base de vecteurs propres et donc en posant $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $P^{-1}BP$ est diagonale : il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

(4) En déduire que $\mathrm{Comm}(A)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

> Soit $B_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $B_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. Montrons que $\mathrm{Comm}(A) = \mathrm{Vect}(B_1, B_2)$, ce qui montrera que $\mathrm{Comm}(A)$ est de dimension 2.
> Soit B une matrice de $\mathrm{Comm}(A)$, alors d'après la question précédente
> $$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
> En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, nous obtenons
> $$P(P^{-1}BP)P^{-1} = P(x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})P^{-1} = xP \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + yP \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = xB_1 + yB_2$$
> Ce qui montre que $\mathrm{Comm}(A)$ est inclus dans $\mathrm{Vect}(B_1, B_2)$.
> Pour l'inclusion réciproque, remarquons d'abord que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et donc que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$. Puis calculons
> $$\begin{aligned} AB_1 &= (P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1})(P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}) = P(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})P^{-1} = P(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})P^{-1} \\ &= (P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1})(P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}) = B_1 A \end{aligned}$$
> Et de même, nous montrerions que $AB_2 = B_2A$. Les matrices B_1 et B_2 sont donc dans $\mathrm{Comm}(A)$, le sous-espace vectoriel qu'elles engendrent est donc inclus dans $\mathrm{Comm}(A)$.